

## 基于小孔节流的液体动静压球轴承动态特性分析\*

## ANALYSIS OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF SPHERICAL HYBRID SLIDING BEARINGS BASED ON ORIFICE THROTTLING

陈雨飞\*\* 沈景凤\*\*\* 周羿好

(上海理工大学机械工程学院, 上海 200093)

CHEN YuFei SHEN JingFeng ZHOU YiHao

(College of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**摘要** 以小孔节流方式的液体动静压球轴承为研究对象,建立球轴承的润滑数学模型,推导出层流状态下的 Reynolds 方程,引入流量守恒原理并结合小孔节流器的流量计算得到油腔和封油边压力分布;采用微扰法推导出扰动压力控制方程,通过有限差分法和松弛迭代法求解扰动压力控制方程得到轴承的刚度和阻尼系数。运用数值分析研究供油压力、转速及油膜间隙等参数对轴承动态特性系数的影响。结果表明,随着油膜间隙减小,供油压力的增大,刚度和阻尼系数会随之增大;随着转速增大,直接刚度变化趋势较小,直接阻尼降低趋势较明显;当油膜间隙为 20  $\mu\text{m}$  时,轴承刚度和阻尼系数达到最大;转速的提高对于刚度影响较小,而阻尼系数则会明显降低。

**关键词** 小孔节流 液体动静压球轴承 流量守恒原理 雷诺方程 微扰法 动态特性

**中图分类号** TH133.36

**Abstract** Taking the spherical sliding bearings with orifice throttling as the research object, the mathematical model of lubrication of spherical hybrid sliding bearings is established and the Reynolds equation under laminar flow state is deduced from this model. The pressure distribution of the oil chamber and oil edge are calculated according to the flow conservation principle of the orifice throttle. Combining with the finite difference method and relaxation iterative method to solve the disturbance pressure control equation which is derived by means of perturbation method. The stiffness coefficient and damping coefficient of spherical sliding bearings are used to study the influence of supply pressure, rotating speed, average oil film clearance and other parameters on the dynamic characteristics coefficient of the bearing through numerical analysis. The results show that as the oil film clearance decreases and the oil supply pressure increases, the stiffness coefficient and damping coefficient will increase accordingly. As the rotating speed increases, the changing trend of the direct stiffness is small while the decreasing trend of the direct damping is obvious. When the oil film clearance is 20  $\mu\text{m}$ , the stiffness coefficient and damping coefficient of spherical hybrid sliding bearings reach the maximum. The increasing of rotating speed has little effect on the stiffness while the damping coefficient will be significantly reduced.

**Key words** Orifice throttling; Spherical hybrid sliding bearings; Flow conservation principle; Reynolds equation; Perturbation method; Dynamic characteristics

Corresponding author: SHEN JingFeng, E-mail: shjf@163.com, Tel: +86-21-55273617

The project supported by the Shanghai Sailing Program (No.19YF1434500).

Manuscript received 20210928, in revised form 20211107.

## 0 引言

液体动静压球轴承具有高回转精度、高动态刚度、高阻尼减振性和长寿命等性能优势,可用于超精密机床、大型或重型机床等领域<sup>[1-2]</sup>。当轴承受到外部载荷

时,转子轴心随着载荷的变化作非线性运动,轴承的刚度和阻尼直接影响轴承转子系统的稳定性,轴承转子系统一旦发生失稳,转子会出现碰、摩现象导致轴承失效。因此,不仅要研究液体动静压球轴承的静态特性,还非常有必要对液体动静压球轴承的动态特性进行深

\* 20210928 收到初稿, 20211201 收到修改稿。上海市扬帆计划项目(19YF1434500)资助。

\*\* 陈雨飞, 男, 1997 年生, 江苏镇江人, 汉族, 上海理工大学机械工程学院硕士研究生, 主要研究方向为轴承润滑及转子动力学。

\*\*\* 沈景凤(通信作者), 女, 1968 年生, 安徽合肥人, 汉族, 上海理工大学机械工程学院副教授, 硕士研究生导师, 主要研究方向为机械设计及理论。

入研究。

在“轴承-转子系统”理论研究中,求解雷诺方程是获得动态特性系数的常用方法,而雷诺方程由于其二阶偏微分方程的形式,求解较困难,难以得到精确解,因此有学者提出采用数值计算的方法来求解,常见的方法有有限差分法、有限元法、偏导数法。郭良斌等<sup>[3]</sup>借助小参数摄动和伽辽金有限元法,给出了求解球面坐标系下二维非定常雷诺气体润滑方程的一种近似解法。戚社苗等<sup>[4]</sup>采用偏导数法求解动压气体润滑雷诺方程,给出动压气体轴承动态刚度和动态阻尼系数普遍适应的计算方法。贾晨辉等<sup>[5]</sup>采用偏导数法推导出扰动压力控制方程,并采用有限差分法离散求解得到动态特性系数,得出了诸如偏心率,供气压力等轴承参数对于半球螺旋槽动静压气体轴承动态特性的影响。LI W J 等<sup>[6]</sup>采用小扰动法推导出陀螺仪中气体球轴承的扰动压力方程,用有限差分法对其离散化求解获得轴承动态特性系数,并模拟了轴心运动轨迹。ILMAR F S<sup>[7]</sup>采用可控油膜的润滑方式,通过控制刚性和柔性转轴的横向振动,来改善轴承的动态特性,并通过增加阻尼消除失稳问题,研究结果表明,刚度和阻尼是影响轴承承载能力的重要因素。郭红等<sup>[8]</sup>提出了一种圆锥浮环动静压轴承的动态特性计算方法,并对其进行了数值仿真,通过解得的动态刚度与阻尼系数进一步讨论了该动静压轴承的稳定性。

鉴于上述文献,本文以液体动静压球轴承为研究对象,在球坐标系下,引入流量守恒原理求解油腔压力,采用微扰法,推导出扰动压力控制方程,并通过有限差分法和松弛迭代法求解轴承油膜的稳态压力和扰动压力,数值计算得到动态刚度与动态阻尼系数,探究轴承的转速、供油压力、平均油膜间隙参数对液体动静压球轴承动态特性的影响规律。

## 1 液体动静压球轴承的轴系结构及小孔节流器流量计算

### 1.1 轴承的轴系结构

液体动静压球轴承的轴系结构由液压供油系统、冷却系统、两个半球轴承及主轴等部件构成,其轴系结构如图 1 所示。

在图 1 中,工作时,供油系统将指定压力的润滑油导入,润滑油流经粗过滤装置 8、油泵 7 和精过滤装置 5 后筛掉油中杂质,此时如润滑油压力过大,润滑油则会经溢流阀 6 回流到油箱内;过滤后的润滑油通过小孔节流器 3 流入轴承间隙,支撑起轴承的凸半球 1,最后随转子转动流回到油箱 9,形成了完整的液压回路。

### 1.2 小孔节流器流量计算

本文主要针对四油腔球轴承,四个油腔呈对称排

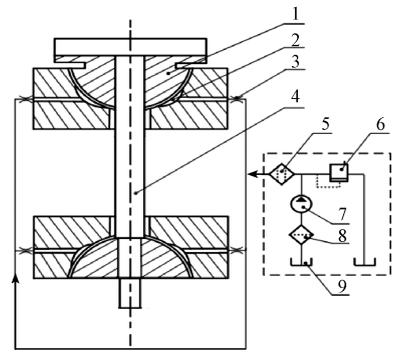


图 1 轴系结构

Fig.1 Shaft system structure

布,其流量计算方式如下:

在不受外部载荷作用时,由小孔节流器流入轴承内油腔的流量<sup>[9]</sup>为

$$Q_{in} = \alpha \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{\frac{2(P_s - P_R)}{\rho_l}} \quad (1)$$

式中, $\alpha$  为流量系数,取  $\alpha = 0.6 \sim 0.8$ ;  $d_0$  为小孔直径;  $\rho_l$  为润滑油密度;  $P_s$  为供油压力;  $P_R$  为油腔压力。

## 2 液体动静压球轴承的润滑分析数学模型

### 2.1 动态雷诺方程

以计算流体力学和液体润滑理论为基础,通过流体连续方程、运动方程以及无滑移的边界条件,推导出层流状态下液体动静压球轴承的非线性无量纲雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta} \right) = \Lambda \sin^2 \theta \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} + \Omega \sin^2 \theta \frac{\partial H_0}{\partial t} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Lambda = 6\eta R^2 \omega / p_s h_0^2 \\ \Omega = (12\eta R^2 / P_s h_0^2) \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $H_0$  为无量纲油膜厚度;  $\bar{P}_0$  为无量纲油膜压力;  $t$  为时间;  $\omega$  为旋转轴角速度;  $\eta$  为液体黏滞系数;  $R$  为轴承的半径;  $P_s$  为供油压力;  $h_0$  为油膜初始间隙。

### 2.2 油膜厚度模型

当转子受到外部载荷的作用,会出现偏心现象,导致半径间隙内油膜厚度发生变化,假设转子处于稳态,如图 2 所示。由图 2 可以看出,转子中心偏离轴承中心的距离分别为  $e_x$ 、 $e_y$  和  $e_z$ 。

将偏心距  $e_x$ 、 $e_y$  和  $e_z$  与平均油膜厚度  $h_0$  的比值设为偏心率,则偏心率的表达式为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{e_x}{h_0} \\ \varepsilon_y = \frac{e_y}{h_0} \\ \varepsilon_z = \frac{e_z}{h_0} \end{cases} \quad (4)$$

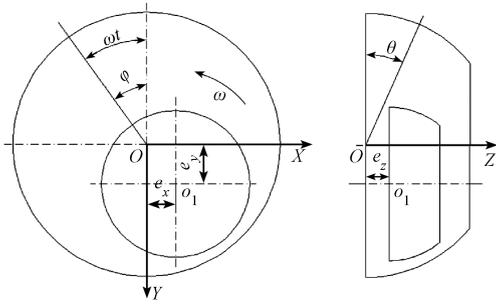


图 2 转子稳态平衡位置

Fig.2 Rotor steady-state balance position

式中,  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$  和  $\varepsilon_z$  分别为沿  $x$ 、 $y$  及  $z$  方向的偏心率。

当处于平衡状态时, 轴承油膜厚度的表达式为

$$H = \begin{cases} h_0(1 + \varepsilon_x \cos\varphi \sin\theta + \varepsilon_y \sin\varphi \sin\theta + \varepsilon_z \cos\theta) & \text{(无油腔)} \\ h_0(1 + \varepsilon_x \cos\varphi \sin\theta + \varepsilon_y \sin\varphi \sin\theta + \varepsilon_z \cos\theta) + h_g & \text{(有油腔)} \end{cases} \quad (5)$$

对式(5)无量纲后可得

$$H_0 = \begin{cases} 1 + \varepsilon_x \cos\varphi \sin\theta + \varepsilon_y \sin\varphi \sin\theta + \varepsilon_z \cos\theta & \text{(无油腔)} \\ 1 + \varepsilon_x \cos\varphi \sin\theta + \varepsilon_y \sin\varphi \sin\theta + \varepsilon_z \cos\theta + \frac{H_g}{h_0} & \text{(有油腔)} \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $H_g$  为油腔深度。

### 2.3 稳态油膜力计算

通过有限差分法对式(2)离散化求解, 得到差分表达式为

$$\bar{P}_{i,j} = (A_{i,j} \bar{P}_{i+1,j} + B_{i,j} \bar{P}_{i,j+1} + C_{i,j} \bar{P}_{i-1,j} + D_{i,j} \bar{P}_{i,j-1} + E_{i,j}) / F_{i,j} \quad (7)$$

式中,  $A_{i,j}$ 、 $B_{i,j}$ 、 $C_{i,j}$ 、 $D_{i,j}$ 、 $E_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$  均为油膜压力方程系数。

运用 Matlab 语言计算油膜压力分布, 为提高计算效率, 采用松弛迭代法, 松弛迭代法的表达式为

$$P_{i,j}^{(k+1)} = f P_{i,j}^k + (1 - f) \bar{P}_{i,j}^{(k+1)} \quad (8)$$

式中,  $f$  为松弛因子, 取值范围为  $0 \sim 2$ ;  $k$  为迭代系数。

### 2.4 流量守恒原理及油腔压力计算

由式(7)得到稳态油膜压力分布, 但此油膜力是由于转子偏心且在相对转速下形成的动压效应。通常情况下, 规则的油腔可以通过理论计算得到油腔的液阻, 进而得到油腔压力, 但对于液体动静压球轴承, 在实际情况下供油压力是不等于油腔压力的。为求解油腔压力以体现液体动静压球轴承的静压特点, 引入流量守恒原理为

$$\begin{cases} Q_{out} = Q_{in} \\ Q_{out} = Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_1 \end{cases} \quad (9)$$

图 3 为油腔流量分布图。由图 3 可知, 油腔形状为矩形块状, 流出油腔的流量分别为  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 、 $Q_4$ , 根据四个油腔的位置分布, 横纵坐标分别代表周向角  $\varphi$  和轴向角  $\theta$ 。图 3 中,  $a = \frac{(n-1)\pi}{2}$ ,  $b = \frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ ,  $n$  取  $1 \sim 4$ 。

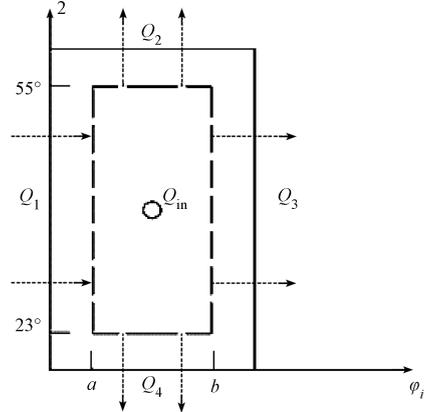


图 3 流量分布图

Fig.3 Flow distribution diagram

基于简化的纳维-斯托克斯方程, 在球坐标系下将球轴承流体动量方程分解得到流体运动方程, 根据无滑移的边界条件积分得到润滑油的速度分量为

$$\begin{cases} v_\varphi = \frac{1}{2\eta R \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} y(y-h) + r\omega \sin\theta \left(\frac{h-y}{h}\right) \\ v_\theta = \frac{1}{2\eta R} \frac{\partial P}{\partial \theta} y(y-h) \end{cases} \quad (10)$$

由式(10)可得在单位时间内流经封油边的单位宽度截面的平均体积流量公式为

$$\begin{cases} q_\theta = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ q_\varphi = \frac{1}{2} r\omega \sin\theta - \frac{h^3}{12\eta r \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (11)$$

结合油腔分布情况可得单位时间内流动的体积在任意轴向切面上的平均体积流量公式为

$$Q_\theta = \int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^{\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} q_\theta d\varphi = \int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^{\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{\partial P}{\partial \theta} d\varphi \quad (12)$$

单位时间内流动通过任意一周向切面上的总体积流量公式为

$$Q_\varphi = \int_{23^\circ}^{55^\circ} q_\varphi d\theta = \int_{23^\circ}^{55^\circ} \left( \frac{1}{2} r\omega h \sin\theta - \frac{h^3}{12\eta r \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) d\theta \quad (13)$$

对式(12)和式(13)进行无量纲处理, 得

$$\bar{Q}_\theta = \int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^{\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{\partial P}{\partial \theta} d\varphi / \frac{p_s h_0^3}{12\eta} = -\frac{1}{R} \int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^{\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta} d\varphi \quad (14)$$

$$\bar{Q}_\varphi = \int_{23^\circ}^{55^\circ} \left( \frac{1}{2} r \omega h \sin\theta - \frac{h^3}{12\eta r \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) d\theta / \frac{p_s h_0^3}{12\eta} = \int_{23^\circ}^{55^\circ} \left( \frac{\Lambda}{R} H_0 \sin\theta - \frac{H_0^3}{R \sin\theta} \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi} \right) d\theta \quad (15)$$

通过液体动静压球轴承的润滑分析有限差分模型,结合有限差分法对流量公式离散化和松弛迭代法提高运算效率,得出油腔压力  $P_R$ 。

### 3 动态特性系数计算

#### 3.1 扰动压力控制方程推导

为求解液体动静压球轴承的动态刚度及动态阻尼系数,本文采用微扰法,建立扰动压力控制方程。给予图 2 所示稳态下的球轴承在  $x, y$  方向各施加一个位移扰动  $\Delta e_x, \Delta e_y$ ,当油膜受到扰动时,会引起油膜厚度变化,通过数值计算扰动压力来解出轴承的动态刚度及动态阻尼系数。

假设球轴承在某一工况下平稳运行,其稳态的油膜压力为  $\bar{P}_0$ ,油膜厚度为  $H_0$ ,施与微小扰动量,并忽略高阶项后,扰动量由轴心偏离稳态平衡位置的瞬时位移扰动量 ( $\Delta x, \Delta y$ ) 和瞬时速度扰动量 ( $\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}$ ) 组成,采用“简正模”法分析,即

$$\begin{cases} \Delta e_x = \frac{\Delta x}{h_0} = |\Delta e_x| e^{it} \\ \Delta e_y = \frac{\Delta y}{h_0} = |\Delta e_y| e^{it} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta e_x = -\Delta e_x \\ \Delta e_y = -\Delta e_y \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \Delta e_x = \frac{\partial \Delta e_x}{\partial t} = i \Delta e_x \\ \Delta e_y = \frac{\partial \Delta e_y}{\partial t} = i \Delta e_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi}) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta}) + [\frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \varphi}) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \theta})] \Delta e_x + \\ & [\frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \varphi}) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \theta})] \Delta e_y + [\frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \varphi}) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \theta})] \Delta e_x + \\ & [\frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \varphi}) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \theta})] \Delta e_y \end{aligned} \quad (21)$$

式(19)的等号右侧展开为

$$\begin{aligned} & \Lambda \sin^2 \theta \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} + \Delta e_x \Omega \sin^3 \theta \cos\varphi + \Delta e_y \Omega \sin^3 \theta \sin\varphi - \Delta e_x \Lambda \sin^3 \theta \sin\varphi - \\ & \Delta e_x \frac{\partial}{\partial \varphi} (3H_0^2 \cos\varphi \sin\theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi}) - \Delta e_x \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (3H_0^2 \cos\varphi \sin^2 \theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta}) + \\ & \Delta e_y \Lambda \sin^3 \theta \cos\varphi - \Delta e_y \frac{\partial}{\partial \varphi} (3H_0^2 \sin\varphi \sin\theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi}) - \Delta e_y \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (3H_0^2 \sin\varphi \sin^2 \theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta}) \end{aligned} \quad (22)$$

联立式(21)和式(22)得到方程组为

无量纲油膜动态厚度  $H$  变化表达式为

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + \Delta e_x \cos\varphi \sin\theta + \Delta e_y \sin\varphi \sin\theta \quad (17)$$

油膜厚度的改变会导致油膜压力变化,瞬态下的油膜压力  $\bar{P}$  按 Taylor 展开可简化为

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \Delta \bar{P} = \bar{P}_0 + \bar{P}_x \Delta e_x + \bar{P}_y \Delta e_y + \bar{P}_x \Delta e_x + \bar{P}_y \Delta e_y \quad (18)$$

式中,  $\Delta e_x = \partial \Delta e_x / t, \Delta e_y = \partial \Delta e_y / t, \bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_x, \bar{P}_y$  分别为无量纲油膜压力对动态运动的导数。其中,  $\bar{P}_x =$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \Delta e_x}, \bar{P}_y = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \Delta e_y}, \bar{P}_x = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \Delta e_x}, \bar{P}_y = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \Delta e_y}$$

将式(17)和式(18)代入动态雷诺方程(2)得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} [(H_0 + \Delta H)^3 \frac{\partial (\bar{P}_0 + \Delta \bar{P})}{\partial \varphi}] + \\ & \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin\theta (H_0 + \Delta H)^3 \frac{\partial (\bar{P}_0 + \Delta \bar{P})}{\partial \theta}] = \\ & \Lambda \sin^2 \theta \frac{\partial (H_0 + \Delta H)}{\partial \varphi} + \Omega \sin^2 \theta \frac{\partial (H_0 + \Delta H)}{\partial t} \end{aligned} \quad (19)$$

考虑到  $\Delta H$  是微小量,因此计算时高阶项由于数值过小可以忽略,对一次项进行保留:

$$(H_0 + \Delta H)^3 = H_0^3 + 3H_0^2 \Delta e_x \cos\varphi \sin\theta + 3H_0^2 \Delta e_y \sin\varphi \sin\theta \quad (20)$$

将式(20)代入到式(19)中并将  $\Delta \bar{P}$  展开,转子处于稳态平衡位置时,油膜受微小扰动,油膜压力的增量由轴颈的瞬时位移扰动量所引起,与时间无关,因此可以忽略油膜压力对时间  $t$  的偏导数项,则式(19)等号左边展开为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi}) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0^3 \sin \theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta}) = \Lambda \sin^2 \theta \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \varphi}) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0^3 \sin \theta \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \theta}) = -\Lambda \sin^3 \theta \sin \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (3H_0^2 \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi}) - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (3H_0^2 \cos \varphi \sin^2 \theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta}) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \varphi}) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0^3 \sin \theta \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \theta}) = \Lambda \sin^3 \theta \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (3H_0^2 \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \varphi}) - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (3H_0^2 \sin \varphi \sin^2 \theta \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \theta}) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \varphi}) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0^3 \sin \theta \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial \theta}) = \Omega \sin^3 \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_0^3 \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \varphi}) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (H_0^3 \sin \theta \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial \theta}) = \Omega \sin^3 \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (23)$$

式(23)的 5 个方程都具有类似的形式,将稳态油膜力  $\bar{P}_0$  和油膜厚度  $H_0$  作为已知量,采用有限差分方法求解其中的稳态油膜压力分布对动态运动的偏导数  $\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_x, \bar{P}_y$  的分布情况。

### 3.2 扰动压力数值计算

采用有限差分法对式(23)求解,获得干扰压力分布。将式(23)中的每个方程转化成式(7)的差分形式:

$$(\bar{P}_\gamma)_{i,j} = (A_{i,j}(\bar{P}_\gamma)_{i+1,j} + B_{i,j}(\bar{P}_\gamma)_{i,j+1} + C_{i,j}(\bar{P}_\gamma)_{i-1,j} + D_{i,j}(\bar{P}_\gamma)_{i,j-1} + E_{i,j})/F_{i,j} \quad (24)$$

式中,  $\gamma = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ,  $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}, E_{i,j}, F_{i,j}$  均为扰动压力控制方程系数。

其中计算应满足边界条件:①工作边界扰动压力为零;②不考虑油膜破裂,流体处于连续流动状态。

同样,运用式(8)的松弛迭代法提高 Matlab 运算效率。当迭代到一定次数,迭代结果满足收敛精度时,迭代立即终止,输出计算结果。采取的收敛标准为

$$\delta \geq (\sum_{i=1}^N |P_i^k - p_i^{k-1}|) / \sum_{i=1}^N P_i \quad (25)$$

式中,  $\delta$  为收敛精度,取值为  $10^{-5}$ 。当迭代数值小于  $10^{-5}$  精度时,迭代即终止。表 1 所示为研究液体动静压球轴承的结构参数和润滑液体参数。

表 1 轴承和润滑液体参数

Tab.1 Bearing parameters and lubricating oil parameters

| 参数 Parameter   | 数值 Numerical value |
|--|--------------------|
| 轴承半径 Bearing radius $R/m$                            | 0.06               |
| 轴承宽度 Bearing width $L/(10^{-3}m)$                    | 100                |
| 油膜间隙 Oil gap $h_0/m$                                 | $3 \times 10^{-5}$ |
| 小孔直径 Orifice diameter $d/(10^{-3}m)$                 | 4.0                |
| 供油压力 Supply pressure $P_s/(10^5 Pa)$                 | 20                 |
| 流量系数 Flow coefficient $\alpha$                       | 0.6                |
| 液体动力黏度 Dynamic viscosity $\eta/(10^{-5} Pa \cdot s)$ | 58                 |
| 大气压强 atmospheric pressure $P_a/MPa$                  | 1.013 25           |
| 润滑油密度 Oil density $\rho/(kg/m^3)$                    | 870                |
| 偏心率 Eccentricity $\varepsilon$                       | 0.3                |

### 3.3 动态刚度系数和动态阻尼系数的求解

油膜的承载力可以通过对油膜压力场沿  $x, y$  两个方向积分求出

$$\begin{cases} F_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} p R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi d\varphi d\theta \\ F_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} p R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi d\varphi d\theta \end{cases} \quad (26)$$

通过油膜的承载力对  $x, y$  方向的位移和速度分别求导可得到油膜的动态刚度及动态阻尼系数。因此,无量纲的油膜刚度和阻尼计算公式为

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{P_s R^2}{h_0} \cdot \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} P_x \sin^2 \theta \cos \varphi & P_y \sin^2 \theta \cos \varphi \\ P_x \sin^2 \theta \sin \varphi & P_y \sin^2 \theta \sin \varphi \end{bmatrix} d\varphi d\theta \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix} = \frac{P_s R^2}{h_0 \omega} \cdot \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} P_x \sin^2 \theta \cos \varphi & P_y \sin^2 \theta \cos \varphi \\ P_x \sin^2 \theta \sin \varphi & P_y \sin^2 \theta \sin \varphi \end{bmatrix} d\varphi d\theta \quad (28)$$

通过 Matlab 编程计算油膜动态刚度及动态阻尼系数,图 4 所示为计算流程图。

根据表 1 的轴承参数计算得到当偏心率  $\varepsilon = 0.3$ , 油膜间隙  $h_0 = 30 \mu m$ , 供油压力为  $P_s = 2 MPa$ , 转速  $n = 3 000 r/min$  时的液体球轴承稳定状态下的油膜压力分布情况,如图 5 所示。

液体动静压球轴承结合了静压与动压的特点。图 5 中,当处于较低转速时,主要依托静压提供压力,动压效果略不明显,油膜压力随着油膜厚度变化而变化,油膜厚度越小,楔形效应越大,动压效果越明显,压力

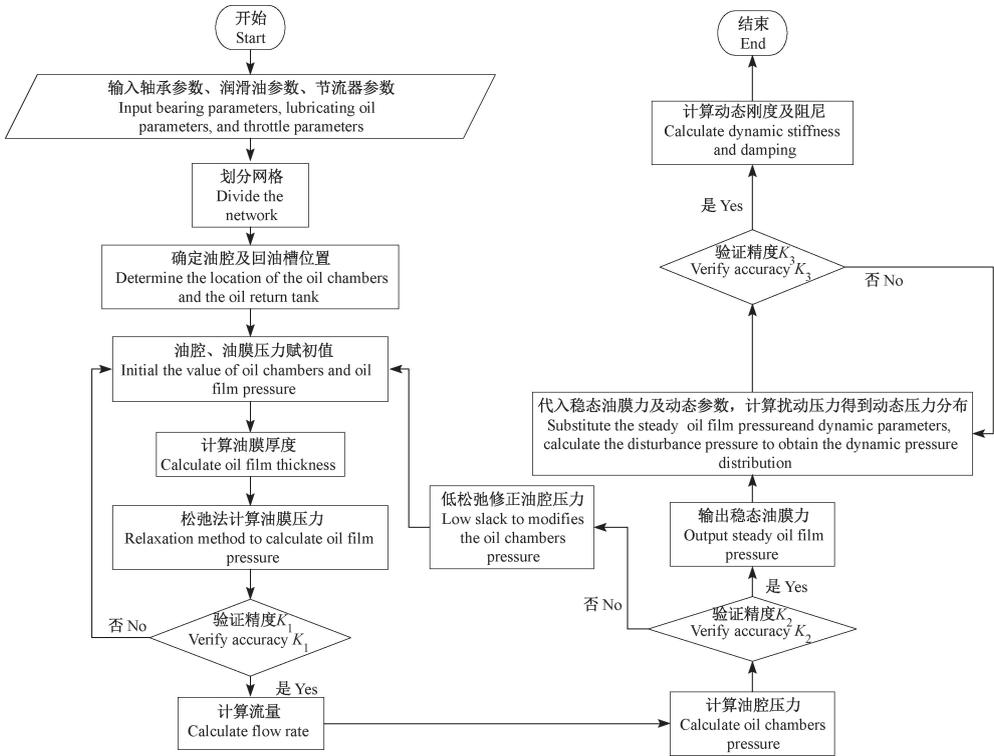


图 4 计算流程图

Fig.4 Calculation flow chart

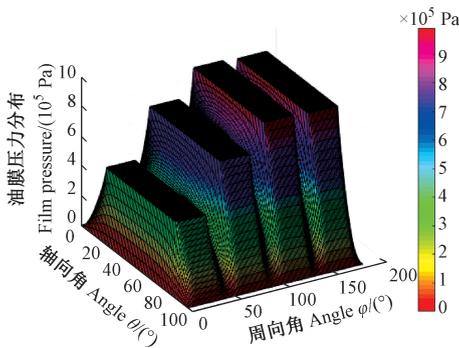


图 5 稳态油膜压力分布

Fig.5 Pressure distribution of steady state oil film

越大。压力分布总体呈现波浪状,根据式(7)的计算结果,油膜压力随着厚度的增大而减小并由油膜入口沿着周向和轴向逐渐减小至 0。

#### 4 球轴承动态特性系数仿真分析

图 6 所示为转速和供油压力对于球轴承在  $x, y$  方向承载力的变化曲线。

由式(27)、式(28)可知,刚度和阻尼是通过油膜承载力对  $x, y$  方向的位移和速度分别求导得到,承载力随转速的变化会直接影响刚度与阻尼的结果。由图 6(a) 可以看出,  $x$  方向油膜的承载力伴随转速增加呈现略微增大的情况,  $y$  方向的承载力呈略减小趋势。这是因为随着转速的增加,球轴承的动压效应随之增强。由于球轴承的承载能力主要依靠静压效应,所以转速对轴承承载力的影响并不明显。

根据表 1 中的参数,液体动静压球轴承的动态特性随转速变化的结果如图 7 所示。

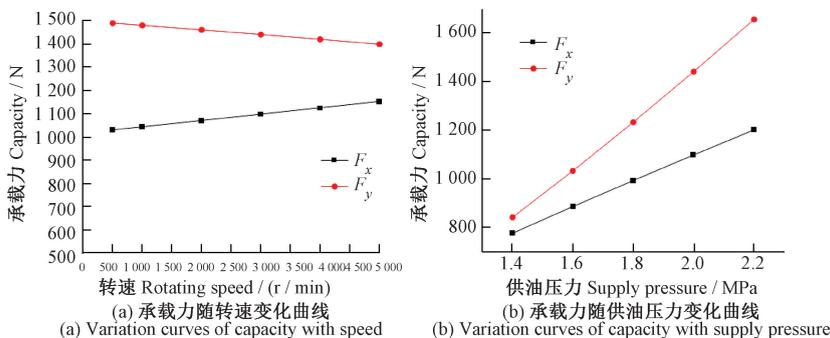


图 6 承载力随参数变化情况

Fig.6 Change of capacity with parameters

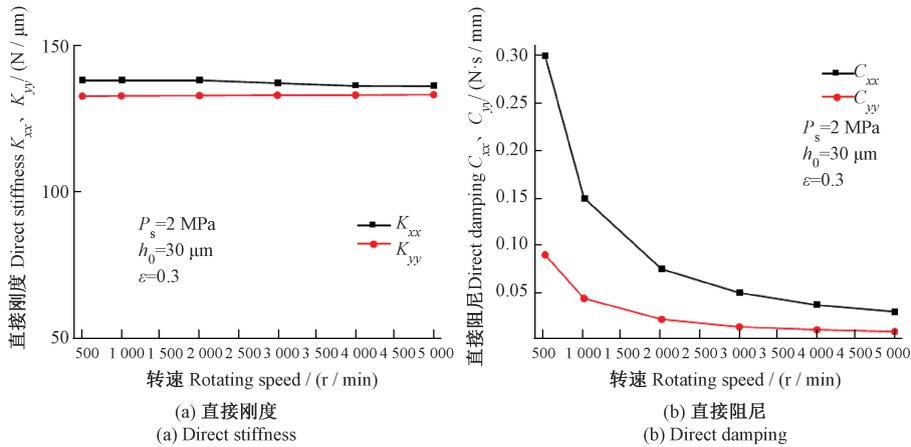


图 7 直接刚度、阻尼与转速的关系

Fig.7 Relationships among direct stiffness and damping and speed

由图 7(a)可以看出,在恒定偏心率( $\epsilon_x = 0.3, \epsilon_y = 0.3$ )情况下,刚度系数  $K_{xx}$  随转速增加而略有减小,  $K_{yy}$  随着转速的增加略有增加。由图 7(b)可以看出阻尼系数  $C_{xx}, C_{yy}$  随着转速的增加而迅速减小。而交叉刚度和交叉阻尼与直接刚度和阻尼有着相同的趋势,

此部分就没有详细讨论。

轴承的平均油膜间隙和供油压力对轴承的动态特性有着较明显的影响。在恒定转速  $n = 3\ 000\ \text{r/min}$  下,图 8 探讨了油膜间隙和供油压力对轴承动态特性的影响。

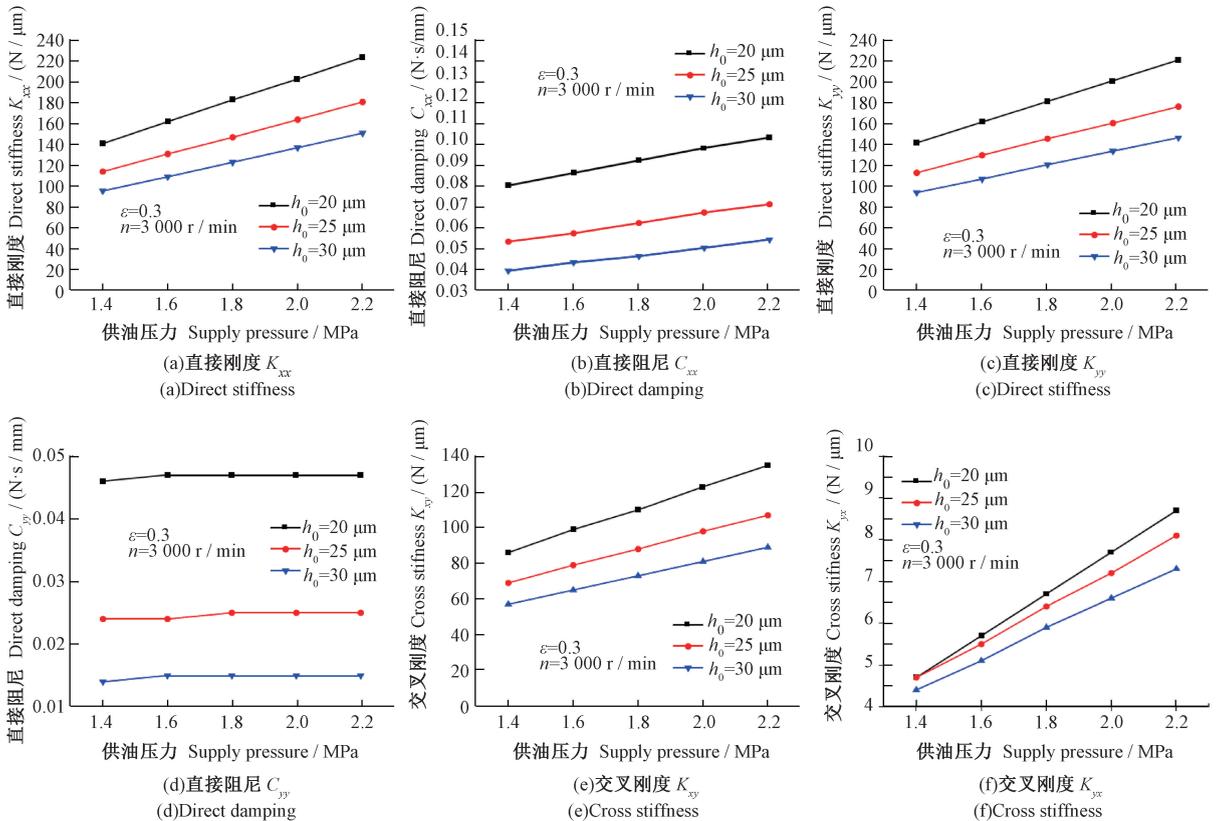


图 8 不同平均油膜间隙下刚度、阻尼与供油压力的关系

Fig.8 Relationship among stiffness, damping and eccentricity with different average oil gaps oil supply pressure

由图 8(b)可以看出,供油压力的增大使得轴承承载力随之提高,且在数值上的增加较为明显,这是因为随着供油压力的增加,球轴承的静压效应增强,润滑油

的动力黏度增加,承载力随之增大,直接导致刚度与阻尼也随之上升。

由图 8(a)、图 8(c)可看出,每个参数对动态刚度

都有不同的影响。直接刚度系数  $K_{xx}$ 、 $K_{yy}$  随着供油压力的增加和平均油膜间隙的减小而近似线性增大,且随着供油压力的增大,油膜间隙的变化对刚度  $K_{xx}$ 、 $K_{yy}$  影响增强。由图 8(b)、图 8(d) 可看出,直接阻尼  $C_{xx}$  随着供油压力的增加和油膜间隙的减小而近似线性增加,  $C_{yy}$  变化趋势不明显,二者在数值上都接近于零。当平均间隙  $h_0 = 20 \mu\text{m}$  时,油膜的刚度和阻尼都会有明显的变化。由图 8(e)、图 8(f) 可以看出,交叉刚度系数  $K_{xy}$ 、 $K_{yx}$  随着供油压力的增加和平均油膜间隙的减小而近似线性增大,且随着供油压力的增大,油膜间隙的变化对刚度  $K_{xy}$ 、 $K_{yx}$  影响增强。轴承的阻尼系数仅仅由液压油的动力黏度产生,因此阻尼系数是非常小的,交叉阻尼系数更小到趋向于 0,可忽略不计。

## 5 算例对比验证

熊万里等<sup>[10]</sup>提出了液体动静压轴承的刚度阻尼计算方法,同样考虑动静压效应,其计算结果与本文算例相比较,二者的趋势接近相同。胡灿<sup>[11]</sup>研究了基于小孔节流的液体动静压混合轴承动力特性,经过计算,得出了随着供油压力增加,液体动静压轴承的直接刚度与交叉刚度随之增大的结果,与本文趋势相符合,其论文内容也讨论了间隙对于轴承动态特性的影响,结果表明,随着间隙的增加,动态特性系数随之增大。

## 6 结论

本文在建立液体动静压球轴承润滑理论数学模型的基础上,结合小孔节流器流量公式,引入流量守恒原理求得了实际油腔压力,采用微扰法,通过动态雷诺方程推导出了扰动压力控制方程,将有限差分法和松弛迭代法相结合,计算出了动态刚度与动态阻尼系数,计算结果表明,平均油膜间隙、转速以及供油压力直接影响液体动静压球轴承的动态刚度与阻尼系数。

1) 计算结果表明,随着转速提高,刚度系数  $K_{xx}$  略有减小,  $K_{yy}$  略有增大,阻尼系数  $C_{xx}$ 、 $C_{yy}$  都迅速减小。随着平均油膜间隙的减小,动态刚度  $K_{xx}$ 、 $K_{yy}$ 、 $K_{xy}$ 、 $K_{yx}$  随供油压力的增加而近似线性增加;随着平均油膜间隙的减小,动态阻尼  $C_{xx}$ 、 $C_{yy}$  随供油压力的增加而略有增加。

2) 计算结果还表明,当平均油膜间隙较小时,油膜的动态刚度和动态阻尼都能达到较高的性能。本文中,当油膜间隙  $h_0 = 20 \mu\text{m}$  时,刚度和阻尼系数达到最大。

3) 轴承的动态特性对转子稳定性的作用取决于动态刚度和阻尼的综合作用。提高转速和供油压力虽然对部分刚度有明显的增加,而较大的供油压力和转

速,易导致轴承产生碰、摩现象,较好的阻尼可以消耗系统涡动能量,有效地提高转子的稳定性。因此,在轴承设计的过程中,应该合理选择设计参数,提高轴承综合性能。

## 参考文献 (References)

- [1] YU X D, GENG L, ZHENG X J, et al. Matching the relationship between rotational speed and load-carrying capacity on high-speed and heavy-load hydrostatic thrust bearing[J]. *Industrial Lubrication and Tribology*, 2018, 70 (1): 8-14.
- [2] FANG C, MENG X, LU Z, et al. Modeling a lubricated full-floating pin bearing in planar multibody systems[J]. *Tribology International*, 2019(131): 222-237.
- [3] 郭良斌,王祖温,包 钢,等.新型环面节流静压气体球轴承压力分布的有限元计算[J].*摩擦学学报*,2004(6):531-535.  
GUO LiangBin, WANG ZuWen, BAO Gang, et al. Finite element analysis of the pressure distribution of externally pressurized spherical gas bearings with inherent compensation [J].*Tribology*, 2004(6): 531-535 (In Chinese).
- [4] 戚社苗,耿海鹏,虞 烈.动压气体轴承的动态刚度和动态阻尼系数[J].*机械工程学报*,2007(5):91-98.  
QI SheMiao, GENG HaiPeng, YU Lie. Dynamic stiffness and dynamic damping coefficient of aerodynamic bearings[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2007(5): 91-98 (In Chinese).
- [5] 贾晨辉,庞焕杰,邱 明.球面螺旋槽动静压气体轴承动态特性分析[J].*润滑与密封*, 2016, 41(8): 24-29.  
JIA ChenHui, PANG HuanJie, QIU Ming. Analysis of dynamic characteristics of spherical spiral groove dynamic and static pressure gas bearings[J]. *Lubrication Engineering*, 2016, 41 (8): 24-29 (In Chinese).
- [6] LI W J, ZHANG M, HUANG Z, et al. Nonlinear analysis of stability and unbalanced response on spherical spiral-grooved gas bearings [J]. *Tribology Transactions*, 2018, 61(6): 1027-1039.
- [7] ILMAR F S. On the future of controllable fluid film bearings [J]. *Mécanique & Industries*, 2011, 12(4): 275-281.
- [8] 郭 红,崔 岩,岑少起,等.圆锥环动静压轴承动态特性理论研究[J]. *机械强度*, 2004(3): 341-344.  
GUO Hong, CUI Yan, CEN ShaoQi, et al. Theoretical study on dynamic characteristics of tapered floating-ring hydrostatic and hydrostatic bearings[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2004(3): 341-344 (In Chinese).
- [9] 钟 洪,张冠坤.液体静压动静压轴承设计使用手册[M].北京:电子工业出版社,2007:9-10.  
ZHONG Hong, ZHANG GuanKun. Design and use manual of hydrostatic and hydrostatic bearings[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2007: 9-10 (In Chinese).
- [10] 熊万里,侯志泉,吕 浪,等.基于动网格模型的液体动静压轴承刚度阻尼计算方法[J].*机械工程学报*,2012,48(23):118-126.  
XIONG WanLi, HOU ZhiQuan, LÜ Lang, et al. Method for

calculating stiffness and damping coefficients of hybrid bearings based on dynamic mesh model [ J ]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(23) : 118-126 ( In Chinese ).

[ 11 ] 胡 灿. 基于小孔节流的液体动静压混合轴承动力特性优化研

究 [ D ]. 南宁: 广西大学, 2013: 42-47.

HU Can. Study on optimization of dynamic characteristics for liquid hybrid bearing based on orifice [ D ]. Nanning: Guangxi University, 2013; 42-47 ( In Chinese ).



# 科技创新 智能未来